• Δίνεται η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|+x}$

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to \frac{3}{4}} f^{-1}(x) = 2$$

(Η απόδειξη του ορίου να γίνει μέσω του ε-δ ορισμού)

<u>ΛΥΣΗ</u>

Εφόσον ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}: \mathbb{R} \to A$ τότε έχει νόημα η μελέτη του παραπάνω ορίου.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| + x \neq 0\} = (0, \infty) = A$$

Συνεπώς, $\forall x \in (0, \infty)$: $f(x) = \dfrac{x+1}{x+x} = \dfrac{x+1}{2x}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{2x_1} = \frac{x_2+1}{2x_2} \Rightarrow 2x_1x_2 + 2x_2 = 2x_1x_2 + 2x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{Η } f \text{ αμφιμονοσήμαντη}$$

Έπειτα, $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{2x} \Rightarrow 2xy = x+1 \Rightarrow 2x \cdot y - x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(2y-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2y-1} > 0 \Rightarrow 2y - 1 > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{2}$$

Άρα, $R_f = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in A : y = f(x)\} = (1/2, \infty)$

Επομένως, $f^{-1}: (\frac{1}{2}, \infty) \to (0, \infty)$ με τύπο:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad x \in (\tfrac{1}{2}, \infty)$$

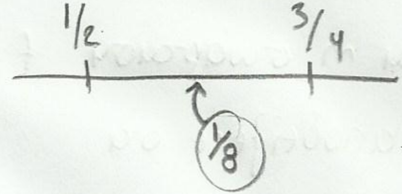
Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to \frac{3}{4}} \dfrac{1}{2x-1} = 2$ αν και μόνο αν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \tfrac{1}{2}) : 0 < |x - \tfrac{3}{4}| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{2x-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

Υπολογίζουμε, $\left| \dfrac{1}{2x-1} - 2 \right| = \left| \dfrac{1-4x+2}{2x-1} \right| = \dfrac{|3-4x|}{2x-1} = \dfrac{4|x-\frac{3}{4}|}{2x-1}$ ①

Όπου ① $< \dfrac{4 \cdot \delta}{2x-1}$. ②

Δίχως βλάβη της γενικότητας



Έστω $\delta = \frac{1}{8}$

Άρα, $|x - \frac{3}{4}| < \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} < x - \frac{3}{4} < \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{8} < x < \frac{7}{8} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{10}{8} < 2x < \frac{14}{8} \Rightarrow \frac{5}{4} - 1 < 2x - 1 < \frac{7}{4} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < 2x - 1 < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{3} < \frac{1}{2x-1} < 4$$

Άρα, η ②: $4\frac{\delta}{2x-1} < 4 \cdot \delta \cdot 4 < 16\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{16}$.

Άρα, $\delta = \min\left\{\frac{1}{8}, \frac{\varepsilon}{16}\right\}$.